•基础理论与方法•

SIR 模型在一起校园急性出血性结膜炎 暴发疫情处理中的应用

陈田木 刘如春 王琦琦 朱松林 谭爱春 何琼 刘鑫 胡国清

【导读】 应用易感者-感染者-移出者(SIR)模型模拟学校暴发的急性出血性结膜炎,为疫情处理提供参考。采用经典SIR模型构建数学模型,Malthusian指数递减模型估计采取干预措施后的传染率系数(β),通过疫情早期数据确定参数和设置初始值,使用Matlab 7.1 软件进行疫情处理效果模拟。结果显示在无干预措施下,疫情将经历3个阶段:(1)初期(≤5 d)疫情发展较慢,是采取防控措施的最佳时期;(2)快速发展期(6~15 d)采取防控措施效果不甚理想;(3)中后期(≥16 d)90%以上易感者已被感染,采取措施已无较大意义。在有干预措施的情况下,SIR模型模拟结果显示,新发病例数迅速减少,疫情能得到有效控制,该结果与实际疫情发展情况基本相符。SIR模型对模拟校园急性出血性结膜炎暴发疫情具有较好效果。

【关键词】 易感者-感染者-移出者模型; 急性出血性结膜炎; 模拟; 干预

Application of Susceptible-Infected-Recovered model in dealing with an outbreak of acute hemorrhagic conjunctivitis on one school campus CHEN Tian-mu¹, LIU Ru-chun², WANG Qi-qi¹, ZHU Song-lin¹, TAN Ai-chun¹, HE Qiong¹, LIU Xin¹, HU Guo-qing¹. 1 Department of Epidemiology and Health Statistics, School of Public Health, Central South University, Changsha 410078, China; 2 Changsha Center for Disease Control and Prevention

Corresponding author: HU Guo-qing, Email: huguoqing009@gmail.com

This work was supported by a grant from the 2009 New Central Scholar Support Grant of Ministry of Education of China (No. NCET-10-0782).

[Introduction] To simulate intervention measures in controlling an outbreak of acute hemorrhagic conjunctivitis on one school campus by using the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) model, to provide evidence for preparedness and response to the epidemic. Classical SIR model was used to model the epidemic. Malthusian exponential decline method was employed to estimate the infective coefficient β for interventions. The initial value of parameters was determined based on empirical data. The modeling was implemented using Matlab 7.1 software. Without interventions, the outbreak was expected to experience three phrases: (1) early stage (the first 5 days) in which the epidemic developed slowly and could be intervened easily; (2) rapid growing stage (6-15 days) in which the number of infected cases increased quickly and the epidemic could not be well controlled; and (3) medium and late stage (16 days and later) in which more than 90% of the susceptible persons were infected but the intervention measures failed to prevent the epidemic. With the implementation of interventions, the epidemic was predicted to be controlled in the early stage, under the SIR model. The simulation based on the SIR model kept an acceptable consistency with the actual development of epidemic after the implementation of intervention measures. The SIR model seemed effective in modeling interventions to the epidemic of acute hemorrhagic conjunctivitis in the schools.

[Key words] Susceptible-Infected-Recovered, model; Acute hemorrhagic conjunctivitis; Simulation; Intervention

数学建模已成为一种在传染病疫情处理方面的有效手段。2003年SARS流行期间,WHO研究人员

DOI: 10.3760/cma.j.issn.0254-6450.2011.08.021

基金项目:教育部新世纪人才支持计划(NCET-10-0782)

作者单位: 410078 长沙,中南大学公共卫生学院流行病与卫生统计学教研室(陈田木、王琦琦、朱松林、谭爰春、何琼、刘鑫、胡国清); 长沙市疾病预防控制中心(刘如春)

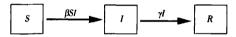
通信作者:胡国清,Email:huguoqing009@gmail.com

通过构建数学模型对疫情发展做出准确预测,即通过简单防控措施就能有效遏制疫情的传播^[1,2]。目前越来越多的国内学者开始关注数学建模在传染病疫情控制中的应用^[3-7]。急性出血性结膜炎作为一种常见的校园急性传染病,具有夏秋季高发、起病急、潜伏期短、症状轻、传染性强、传播较快的特点^[8,9],如在疫情早期不能采取有效措施,将会造成

迅速流行。易感者-感染者-移出者(Susceptible-Infected-Recovered, SIR)模型作为一种经典的传染病动力学模型,将疾病传播链用易感者、染病者、移出者相连,不考虑潜伏期及人口迁入、迁出、出生、自然死亡等种群动力学因素^[10],特别适用于无潜伏期或潜伏期很短(对疾病传播影响几近可以忽略)的传染病。因此 SIR 模型适合急性出血性结膜炎学校爆发性疫情的特点。本研究拟采用 SIR 模型对一起校园急性出血性结膜炎疫情的应对进行模拟,以探讨其应用价值。

基本原理

1. 有、无干预情况下的 SIR 模型: SIR 模型是将人群分为 3 类,即易感者(S)、感染者(I)和移出者(R)^[10]。由于染病、恢复等原因,该模型假定 3 类人群之间以一定比例进行动态移动。 SIR 模型建立在 3 个假设基础之上:①不考虑人口出生、死亡、流动等种群动力学因素;②一例患者一旦与易感者接触就必然具有一定传染力;③ t时刻,单位时间内从染病者移出的人数与患者数量成正比,比例系数为γ^[10],即



其中, β 为传染率系数, βSI 为t时刻新增病例数, γ 为移出率系数, γI 为t时刻恢复者人数。

在无外界干预的情况下,用 β_{ux} 表示传染率系数,此时 SIR 模型可用微分方程组表示:

$$\begin{cases} dS/dt = -\beta_{\text{unc}} SI \\ dI/dt = -\beta_{\text{unc}} SI - \gamma I \\ dR/dt = \gamma I \end{cases}$$

式中等号左侧分别表示为S、I和 R在特定时刻t的 瞬时变化速度; $\beta_{um}SI$ 表示无干预情况下t时刻新增 病例数, γI 为t时刻恢复者人数。在无二次感染和死亡病例出现的情况下,随时间推移,S将会持续下降,R会持续增加,I会先增加后减少。SIR模型存在疾病消除和持续存在的基本繁殖数阈值 $\lambda^{[11]}$ 。基本繁殖阈值是指在易感人群中1个传染源在其传染期内预计直接传播的新病例数,特定时刻t的基本繁殖数 $\lambda(t)$ 可表示为; $\lambda(t) = \beta_{um}S(t)/\gamma$ 。当 $\lambda<1$ 时,疾病不会流行,感染者数量 I(t)将单调下降而趋于零,疾病将逐渐消除;当 $\lambda>1$ 时,疾病流行; $\lambda=1$,疾病将持续存在,不会消除,也不会造成流行。

在采取干预措施后,SIR模型中的移出率系数y并不受到影响,而传染率系数 β 将发生变化。作为区别,采用 β _{con}表示有干预措施下的传染率系数。在有

干预措施的情况下, $\lambda(t)$ 符合随时间变化呈指数衰减的 Malthusian 模型,且 λ 减小速度很快,在学校暴发疫情中,S(t)的变化幅度很小,对模型的影响不大,可以忽略,此时传染率系数 β_{con} 与 $\lambda(t)$ 成正比,也符合随时间变化呈指数衰减的 Malthusian 模型,即 β_{con} = Ae^{-t} ,式中A 为常数,k 为常数且取正值 [12]。此时,SIR模型可用微分方程组表示:

$$\begin{cases} dS/dt = -Ae^{-k}SI \\ dI/dt = -Ae^{-k}SI - \gamma I \\ dR/dt = \gamma I \end{cases}$$

2. 急性出血性结膜炎的流行特点和常见干预措施^[8,9,13]:该病在学校暴发的特点包括潜伏期短(一般12~24 h),症状较轻,并发症少,极少有因病死亡,学校短期内无学生迁入、迁出以及出生和死亡等种群动力学因素,故适合采用经典SIR模型对其疫情处理进行数学模拟。疫情处理常见干预包括隔离治疗患者,做好教室、寝室、物品等消毒,加强防病知识的宣传教育等。

实例分析

1. 疫情概况: 2010年9月16日长沙市疾病预防控制中心(CDC)接到该市某中学近日出现急性出血性结膜炎30余例的报告,即赴现场核实,并采取相应防控举措。经核实,该校包括3个年级23个班,在校学生及教职员工共1150人,截至9月16日已有累计病例89例。本研究搜集病例资料包括该起疫情中的所有病例,时间起始于出现首例病例前推一个最长潜伏期,止于末例病例再过一个最长潜伏期。病例定义参照卫生部2008年颁布的最新诊断标准《急性出血性结膜炎诊断标准(WS 217-2008)》[13],纳入对象包括所有在校学生、教职员工和食堂从业人员。

2. SIR 模型相关参数估计与初始值设定:在无干预情况下,该模型涉及未知参数包括移出率系数 γ 和传染率系数 β_{unc} 。 $1/\gamma$ 为平均患病期,根据急性出血性结膜炎发病特点, $1/\gamma$ 为 $7 \sim 10$ d^[13],本研究取 $1/\gamma = 8$ d,故 $\gamma = 0.125$ 。9月13—15日 CDC未介入疫情处理。根据此时期数据,按照公式 $\lambda(t) = \beta_{unc}S(t)/\gamma$,求得 $\beta_{unc} = 4.8872 \times 10^{-4}$ 。本次疫情该校人数为1150人,故在疫情初始时相关参数的初始值为:S(0)=1061,I(0)=89,R(0)=0。

采取干预措施(r时刻)后,该模型涉及3个未知参数:移出率系数y、A和k。此时,仍取y=0.125。设采取干预措施的时刻为模型开始仿真的初始时

刻,即 t_0 =0,则 β_{con} = Ae^{-ht} = Ae^0 =0.000 488 72,求得 A=0.000 488 72。因此 β_{con} =0.000 488 72 e^{-ht} ,在此 Malthusian模型中,k可取不同值,图 1显示 k不同取值情况下 β_{con} 的变化。根据已有急性出血性结膜炎疫情的相关报道[14.15],在采取措施后,疫情往往不会迅速降为 0,由于防控措施的落实,疫情通常也不会持续很久。而图 1干预后疫情模拟结果显示,当 k 取值为 2.0 和 0.5 时,模拟疫情与实际相差较远;当 k 取值为 1.0 时,模拟疫情与疫情实际发展较为接近。结合以上分析,故选取 k=1 对干预后疫情发展进行仿真。初始值: $S(\tau)$ =1061, $I(\tau)$ =89, $R(\tau)$ =0,S(t)+I(t)+R(t)=N,N=1150。

图1 不同k取值 β_{con} 的变化情况

- 3. 数据处理和数学模拟:采用软件 Matlab 7.1 的 "Simulink"模块进行分别对有、无干预措施下的疫情传播情况进行模拟,采用 SPSS 13.0 软件进行相关制图。
- 4. 有、无干预措施下的疫情发展模拟:经参数设置后,无干预情况下可得 SIR 模型微分方程组:

$$\begin{cases} dS/dt = -0.000 \ 488 \ 72 \ SI \\ dI/dt = 0.000 \ 488 \ 72SI - 0.125I \\ dR/dt = 0.125I \end{cases}$$

按此方程组对该起疫情进行模拟,结果提示:① 在无防控措施下,该中学急性出血性结膜炎疫情发 展迅速,流行周期约为50 d;②20 d内绝大部分易感 者将感染该病;③在疫情发展初期(≤5 d),疫情发 展缓慢,为采取防控措施最佳时期;在疫情快速发展 期(第6~15天),易感者减少速度和染病者增加速 度均很快,防控措施很难达到理想效果;在疫情发展 中后期(≥16 d),超过90%的易感者均已染病,此时 采取防控措施已无太大意义(图2)。

采取防控措施后的微分方程组为:

$$\begin{cases} dS/dt = -0.000 \ 488 \ 72e^{-t} SI \\ dI/dt = 0.000 \ 488 \ 72e^{-t} SI - 0.125I \\ dR/dt = 0.125I \end{cases}$$

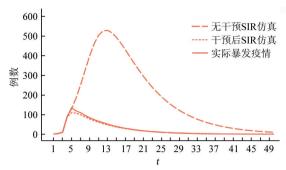


图2 急性出血性结膜炎在有、无干预措施下 SIR 模型 疫情仿真结果与实际疫情发展比较

按该方程组对疫情进行仿真,在采取干预措施后,疫情将得到有效控制,染病者例数仅在第5天出现一个小高峰,随后呈逐渐下降趋势。

- 5. 防控措施的仿真与实际结果比较:经长沙市 CDC 现场调查,9月13日该校开始出现首例急性出血性结膜炎病例,至16日病例迅速增多,呈进一步扩散趋势。此时 CDC 开始介入并实施防控,新发病例迅速下降,至18日新发病人数已降至1例,自25日起无新发病例报告,疫情平息。图2显示,采用干预措施后的疫情模拟结果与疫情实际发展非常接近。
- 6. 不同时间点采取干预措施对疫情发展的比较:本研究通过模型分别模拟了第5、10、20天采取干预措施后的疫情发展,并与无干预措施下的疫情发展进行比较。结果显示,随着干预时间的延后,染病者人数明显增加,疫情控制效果明显变差。与无干预措施下的疫情发展比较,第20天采取干预措施已无明显效果(图3)。提示,越早采取干预措施,疫情防控效果越好。

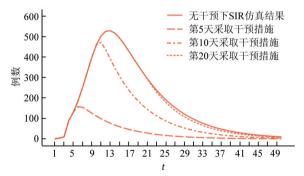


图3 急性出血性结膜炎暴发后不同时间采取干预措施 对染病例数变化的影响

讨 论

以往对SIR模型的应用研究多集中在数学模型的构建之上[16-20],且现有国内研究还未涉及利用Malthusian模型对采取防控措施前后的传染率系数

 β_{con} 的模拟。

急性出血性结膜炎是由肠道病毒70型和柯萨奇病毒A组24型变种(CA24v)引起的急性传染病[13]。由于该病传播速度较快,传播条件容易实现,在卫生条件稍差的人群聚集场所如学校和托幼机构极易造成爆发性流行,防控难度较大,且对疫情传播速度缺乏精确的量化估计。以往对该类疾病的处理主要集中在现场处置,较少涉及疫情评估与防控效果预测。

本研究结果显示,首例病例报告后的前5天疫情发展缓慢,为疫情最佳干预阶段。尽管此阶段上报病例较少,但防控部门应高度重视早期干预。该模型较好地模拟了采取干预措施前后疫情发展和不同时机采取干预的效果,对急性出血性结膜炎疫情的早期发现和处理具有指导意义。

利用 Malthusian 模型对 β con 改进后模拟结果显示,早期干预能很好地控制疫情发展,而且该模拟结果与疫情实际数据大致相符,说明 SIR 模型在急性出血性结膜炎疫情处理中有一定应用价值。

参考文献

- [1] Lipsitch M, Cohen T, Cooper B, et al. Transmission dynamics and control of severe acute respiratory syndrome. Science, 2003, 300(5627):1966–1970.
- [2] Riley S, Fraser C, Donnelly CA, et al. Transmission dynamics of the etiological agent of SARS in Hong Kong: impact of public health interventions. Science, 2003, 300(5627): 1961–1966.
- [3] Huang DS, Guan P, Zhou BS. Research on fitting of SIR model on prevalence of SARS in Beijing city. Chin J Dis Control Prev, 2004,8(5):399–400. (in Chinese) 黄德生,关鹏,周宝森. SIR 模型对北京市 SARS 疫情流行规律的拟合研究. 疾病控制杂志,2004,8(5):399–400.
- [4] Tan XH, Liu Q, He JF, et al. A study on the transmission dynamic model of SARS in Guangdong province. Chin J Dis Control Prev, 2006, 10(6):560–563. (in Chinese) 谭旭辉, 柳青, 何剑峰, 等. 广东省 SARS 传播模型实证研究. 疾病控制杂志, 2006, 10(6):560–563.
- [5] Zhang B, Song ZZ, Tao B, et al. Dynamic of SARS spread in Inter Mongolia and evaluation of the effectiveness of intervention measures. Med Ani Prey, 2008, 24(1):4-6. (in Chinese) 张斌, 宋壮志, 涛波,等. 内蒙古自治区 SARS 传播模型建立及其于预措施评价研究. 医学动物防治, 2008, 24(1):4-6.
- [6] Xia JL, Wu H. Analysis of compartmental modeling for epidemic data of SARS in Hong Kong and prediction of SARS development in Hong Kong and Beijing. Chin J Dis Control Prev, 2003, 7(3):182–184. (in Chinese) 夏结来,吴昊. 香港非典型肺炎发病情况的室模型分析及对北京疫情进展的预测报告. 疾病控制杂志, 2003, 7(3):182–184.
- [7] Wu KC, Wu KL, Chen WJ, et al. Mathematical model and prediction of epidemic trend of SARS. Chin Trop Med, 2003, 3 (4):421-426. (in Chinese) 吴开琛,吴开录,陈文江,等. SARS传播数学模型与流行趋势预测研究. 中国热带医学,2003,3(4):421-426.
- [8] Wang R, Ni DX. Analysis on epidemic situation of acute

- hemorrhagic conjunctivitis in China. Chin J Health Educat, 2008, 24(5):331–333. (in Chinese)
- 王锐, 倪大新. 我国急性出血性结膜炎疫情分析. 中国健康教育, 2008, 24(5): 331-333.
- [9] Chang ZR, Zang J, Wang ZJ. Analysis on epidemic feature of acute hemorrhagic conjunctivitis from 2004 to 2008 in China. Chin J Public Health Manage, 2009, 25 (3): 268–270. (in Chinese)
 - 常昭瑞,张静,王子军. 2004—2008年全国急性出血性结膜炎流行特征分析. 中国公共卫生管理,2009,25(3):268-270.
- [10] Kermack WO, Mckendrick AG. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the Royal Society of London, 1927.
- [11] Xu WX, Zhang ZH. Asymptotic analysis of an age-dependent SIR epidemic model. J Xi'an Jiaotong Uni, 2003, 37(10):1086–1089. (in Chinese) 徐文雄,张仲华. 年龄结构 SIR 流行病传播数学模型渐进分析. 西安交通大学学报, 2003, 37(10):1086–1089.
- [12] Malthus TR. An essay on the principle of population. J Johnson, London, 1798.
- [13] Ministry of Health of the People's Republic of China. Diagnostic criteria for acute hemorrhagic conjunctivitis (WS217-2008). 2008. (in Chinese) 中华人民共和国卫生部. 急性出血性结膜炎诊断标准

(WS217-2008). 2008.

析. 中国学校卫生,2009,30(9):855.

- [14] Jiang LJ, Huang GB. An epidemic analysis on acute hemorrhagic conjunctivitis outbreaks in a township school. Chin J Sch Health, 2009, 30(9):855. (in Chinese) 姜里迦, 黄贵彪. 一起乡镇中学急性出血性结膜炎暴发疫情分
- [15] Zhu MS, Sun CX. An report on acute hemorrhagic conjunctivitis outbreaks at school in Leigu town, Zhushan county. Chin Pri Health Care, 2004, 18(5):28–29. (in Chinese) 朱名树, 孙长喜. 竹山县擂鼓镇中学暴发急性出血性结膜炎的调查处理报告. 中国初级卫生保健, 2004, 18(5):28–29.
- [16] Xin JQ, Wang WJ. An whole situation analysis of a kind of SIR epidemic model with vaccination. Math Prac Theor, 2007, 37 (20):71–76. (in Chinese) 辛京奇,王文娟. 一类带有接种的 SIR 传染病模型的全局分析. 数学的实践与认识,2007,37(20):71–76.
- [17] Song M. Stability of a SIR epidemic model with time delay. Math Prac Theor, 2009, 39(15):136–140. (in Chinese) 宋美. —类带时滞的 SIR 传染病模型的稳定性. 数学的实践与认识, 2009, 39(15):136–140.
- [18] Zhao CS, Liu YD. Dynamics of SIR model with diffusion terms. J Beijing Jiaotong Uni, 2007, 31(3):84–90. (in Chinese) 赵春色,刘迎东. 具有扩散项的 SIR 模型的动力学. 北京交通大学学报, 2007, 31(3):84–90.
- [19] Pang JB, Lu L. Fuzzy control mathematical model on infection of SIR type and its application. Chin J Health Stat, 2003, 20(3): 154–157. (in Chinese) 庞金彪, 鹿利. SIR 型传染病模糊控制模型及其应用. 中国卫生统计,2003,20(3):154–157.
- [20] Hu BA, Chen BW, Xia AS, et al. Study on a delay SIS epidemic model with logistic growth. Chin J Engi Math, 2007, 24(2): 373–376. (in Chinese) 胡宝安, 陈博文, 夏爱生, 等. logistic 增长的时滞 SIS 模型分析. 工程数学学报, 2007, 24(2): 373–376.

(收稿日期:2011-03-16) (本文编辑:张林东)